Тренировочная работа № 4

по МАТЕМАТИКЕ

7 мая 2013 года

11 класс

Вариант МА1701

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс

Фамилия

Имя.

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (С1–С4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

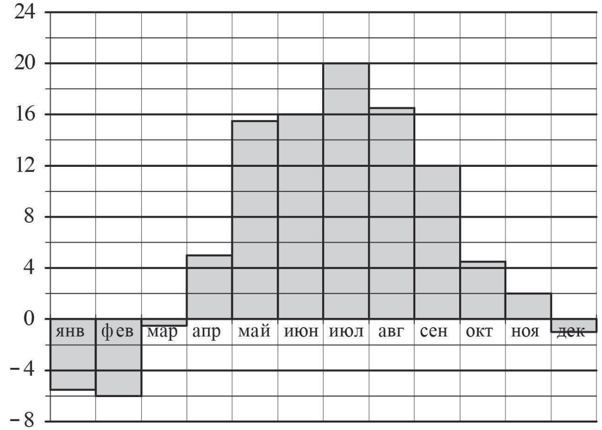
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Диагональ экрана телевизора равна 21 дюйму. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

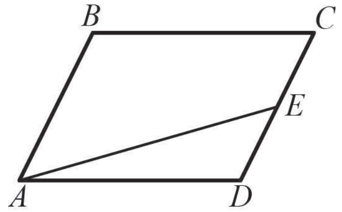
Ответ:

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Какой из летних месяцев 2003 года в среднем был самым холодным? В ответе укажите среднюю температуру в этом месяце, в градусах Цельсия.



Ответ:

B3 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 60. Точка E — середина стороны CD. Найдите площадь треугольника ADE.



Ответ:

B4 Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

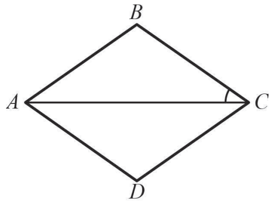
Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	1	3	1	1	2
Б	1	3	3	4	5
В	2	5	3	4	1

Ответ:

B5 Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{7x-15} = \dfrac{1}{4x+3}$.

Ответ:

B6 В ромбе $ABCD$ угол CDA равен 94°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

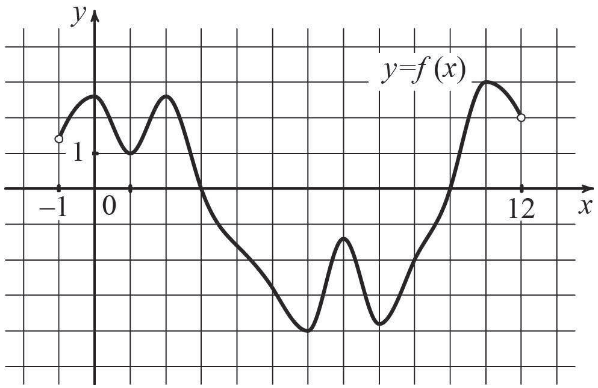


Ответ:

B7 Найдите $-5\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}4$.

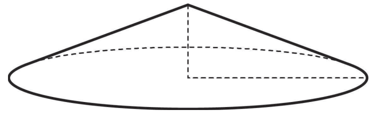
Ответ:

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -12$.



Ответ:

B9 Диаметр основания конуса равен 24, а длина образующей равна 13. Найдите высоту конуса.

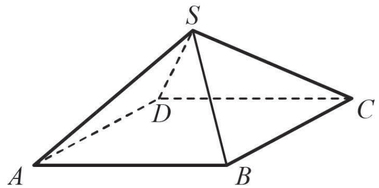


Ответ:

B10 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60% этих стекол, вторая – 40%. Среди стёкол, выпускаемых первой фабрикой, брак составляет 3%. Среди стёкол, выпускаемых второй фабрикой, брак составляет 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ:

B11 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SA равно 5, сторона основания равна $4\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.



Ответ:

B12 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта будет равно 2,4 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 24$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ:

B13 Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 15 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 90 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 54 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

B14 Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2-4x+6}$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\dfrac{1}{\sin x}-1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

C2 Правильные треугольники ABC и ABM лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB=10\sqrt{3}$. Точка P – середина AM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT:TM=3:1$. Вычислите объём пирамиды $MPTC$.

C3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2+\left(1-\sqrt{10}\right)x-\sqrt{10}\le 0, \\ \dfrac{3^{\left|x^2-2x-1\right|}-9}{x}\ge 0. \end{cases}$

C4 Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 7 и 25 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 60. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Тренировочная работа № 4

по МАТЕМАТИКЕ

7 мая 2013 года

11 класс

Вариант МА1702

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс

Фамилия

Имя.

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

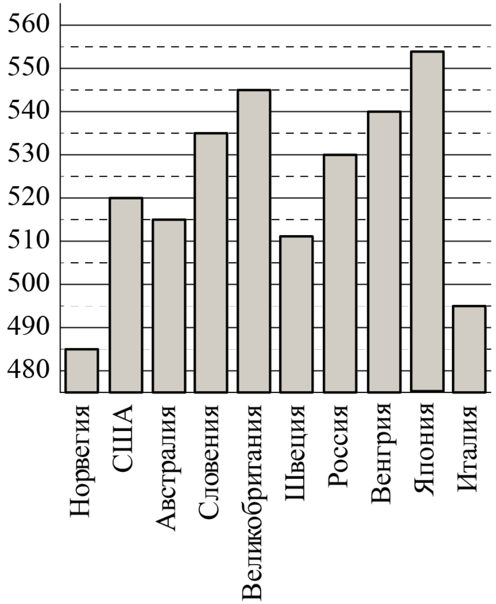
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 В доме, в котором живёт Женя, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Женя живёт в квартире №45. В каком подъезде живёт Женя?

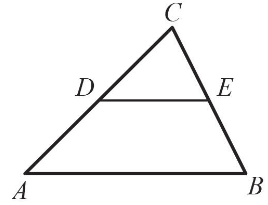
Ответ:

B2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Найдите число стран, в которых средний балл заключён между 500 и 525.



Ответ:

B3 Площадь треугольника ABC равна 12. DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



Ответ:

B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

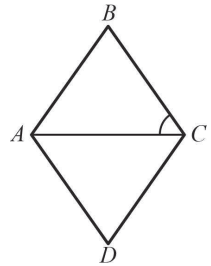
Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4300	2	0	1
Б	5000	3	4	3
В	4700	3	4	1
Г	5300	0	1	0

Ответ:

B5 Найдите корень уравнения $\log_8 2^{7x-8} = 2$.

Ответ:

B6 В ромбе $ABCD$ угол CDA равен 78°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

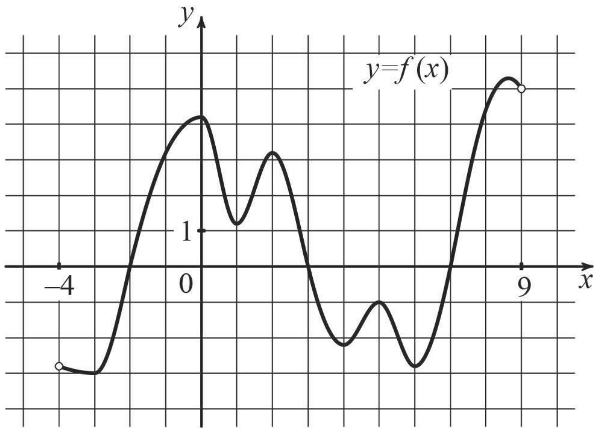


Ответ:

B7 Найдите $5\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0,5$.

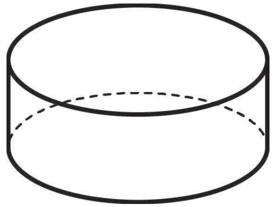
Ответ:

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4;\ 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 13$.



Ответ:

B9 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π, а высота равна 2. Найдите диаметр основания.

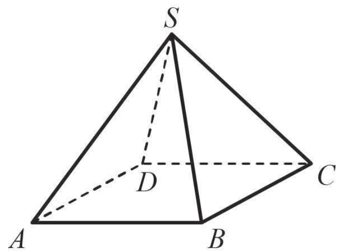


Ответ:

B10 Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ:

B11 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 10, сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.



Ответ:

B12 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $d = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 16 километров? Ответ выразите в километрах.

Ответ:

B13 Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ______

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.

Ответ: ______

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{3}{\sin x} + 3 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

C2 Правильные треугольники ABC и BCM лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

C3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + (2 - \sqrt{15})x - 2\sqrt{15} \le 0, \\ \dfrac{0,2^{|x^2-4x+2|} - 0,04}{3 - x} \le 0. \end{cases}$

C4 Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 16 и 34 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 15, средняя линия трапеции равна 30. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Тренировочная работа № 4

по МАТЕМАТИКЕ

7 мая 2013 года

11 класс

Вариант МА1703

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс

Фамилия

Имя.

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

© СтатГрад 2013 г.

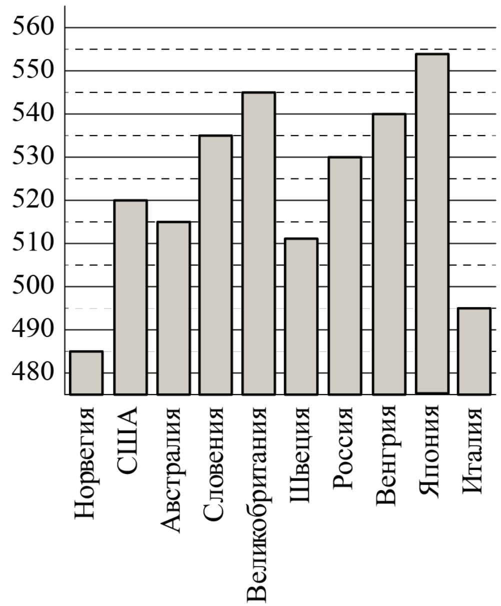
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Диагональ экрана телевизора равна 21 дюйму. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

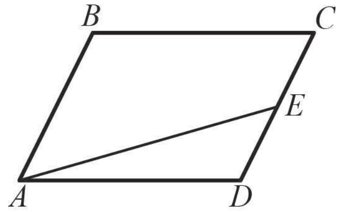
Ответ: ____________

B2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Найдите число стран, в которых средний балл заключён между 500 и 525.



Ответ: ____________

B3 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 60. Точка E — середина стороны CD. Найдите площадь треугольника ADE.



Ответ: ____________

B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01\,P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

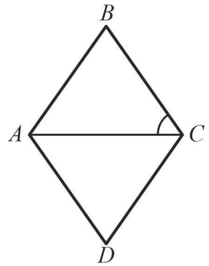
Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4300	2	0	1
Б	5000	3	4	3
В	4700	3	4	1
Г	5300	0	1	0

Ответ: ____________

B5 Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{7x-15} = \dfrac{1}{4x+3}$.

Ответ: ____________

B6 В ромбе $ABCD$ угол CDA равен 78°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

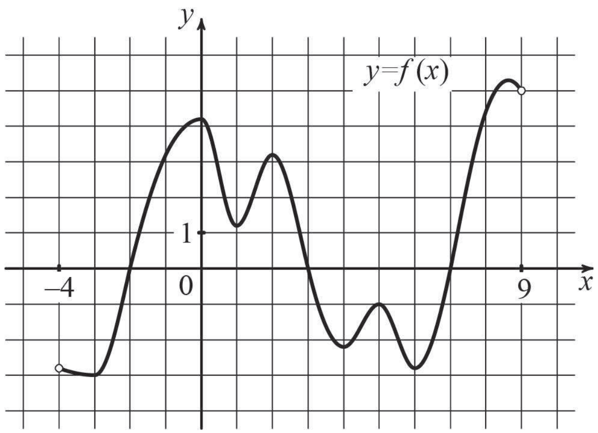


Ответ:

B7 Найдите $-5\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0,4$.

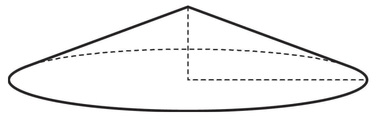
Ответ:

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4;\ 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 13$.



Ответ:

B9 Диаметр основания конуса равен 24, а длина образующей равна 13. Найдите высоту конуса.

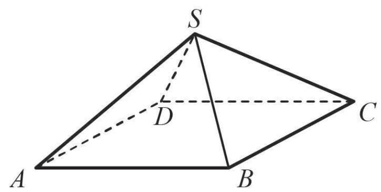


Ответ:

B10 Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ:

B11 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SA равно 5, сторона основания равна $4\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.



Ответ:

B12 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $d = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 16 километров? Ответ выразите в километрах.

Ответ:

B13 Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 15 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 90 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 54 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

B14 Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{8+2x-x^2}$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\dfrac{1}{\sin x}-1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

C2 Правильные треугольники ABC и BCM лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC=8$. Точка P – середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT:TM=1:3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

C3 Решите систему неравенств: $$\begin{cases} x^2+\left(1-\sqrt{10}\right)x-\sqrt{10}\le 0, \\ \dfrac{3^{\left|x^2-2x-1\right|}-9}{x}\ge 0. \end{cases}$$

C4 Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 16 и 34 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 15, средняя линия трапеции равна 30. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Тренировочная работа № 4

по МАТЕМАТИКЕ

7 мая 2013 года

11 класс

Вариант МА1704

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс

Фамилия

Имя.

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

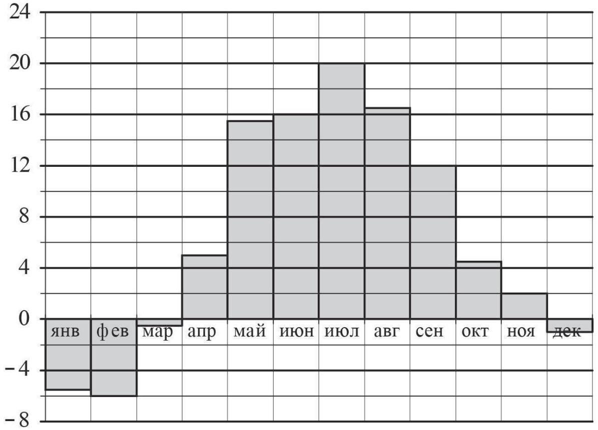
Часть 1

Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 В доме, в котором живёт Женя, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Женя живёт в квартире №45. В каком подъезде живёт Женя?

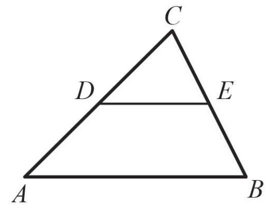
Ответ:

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Какой из летних месяцев 2003 года в среднем был самым холодным? В ответе укажите среднюю температуру в этом месяце, в градусах Цельсия.



Ответ:

B3 Площадь треугольника ABC равна 12. DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



Ответ:

B4 Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

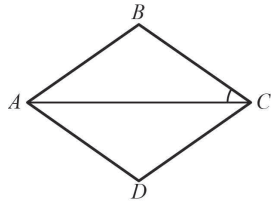
Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	1	3	1	1	2
Б	1	3	3	4	5
В	2	5	3	4	1

Ответ:

B5 Найдите корень уравнения $\log_8 2^{7x-8} = 2$.

Ответ:

B6 В ромбе $ABCD$ угол CDA равен 94°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

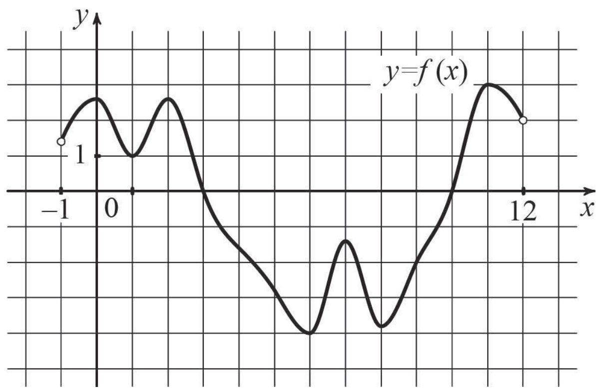


Ответ:

B7 Найдите $5\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0,5$.

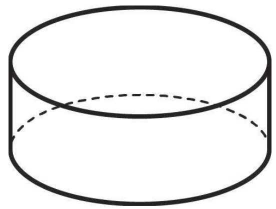
Ответ:

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -12$.



Ответ:

B9 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π, а высота равна 2. Найдите диаметр основания.

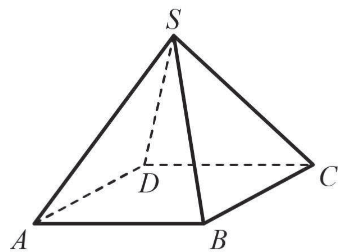


Ответ:

B10 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60% этих стекол, вторая – 40%. Среди стёкол, выпускаемых первой фабрикой, брак составляет 3%. Среди стёкол, выпускаемых второй фабрикой, брак составляет 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ:

B11 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 10, сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.



Ответ:

B12 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта будет равно 2,4 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 24$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: ____________

B13 Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ____________

B14 Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$.

Ответ: ____________

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

C2 Правильные треугольники ABC и ABM лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 10\sqrt{3}$. Точка P — середина AM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 3 : 1$. Вычислите объём пирамиды $MPTC$.

C3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + (2 - \sqrt{15})x - 2\sqrt{15} \le 0, \\ \dfrac{0,2^{|x^2-4x+2|} - 0,04}{3 - x} \le 0. \end{cases}$

C4 Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 7 и 25 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 60. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	53
B2	16
B3	15
B4	0,62
B5	6
B6	43
B7	3,4

№ задания	Ответ
B8	7
B9	5
B10	0,022
B11	32
B12	30
B13	60
B14	2

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	2
B2	3
B3	9
B4	18
B5	2
B6	51
B7	-2,5

№ задания	Ответ
B8	8
B9	8
B10	0,16
B11	192
B12	0,02
B13	63
B14	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	53
B2	3
B3	15
B4	18
B5	6
B6	51
B7	3,4

№ задания	Ответ
B8	8
B9	5
B10	0,16
B11	32
B12	0,02
B13	60
B14	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	2
B2	16
B3	9
B4	0,62
B5	2
B6	43
B7	-2,5

№ задания	Ответ
B8	7
B9	8
B10	0,022
B11	192
B12	30
B13	63
B14	2

© СтатГрад 2013 г

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \dfrac{1}{\sin x} - 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Левая часть уравнения определена, если $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$. При этом

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Поэтому уравнение можно переписать в виде

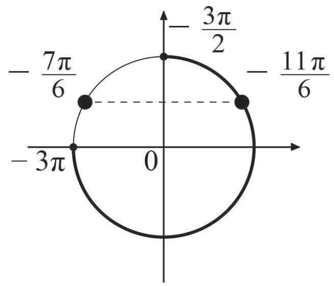
$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 2 = 0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\dfrac{1}{\sin x}$, получим $\dfrac{1}{\sin x} = 2$ или $\dfrac{1}{\sin x} = -1.$ Значит, либо $\sin x = \dfrac{1}{2}$, откуда

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$$

либо $\sin x = -1$, что невозможно в силу условия $\cos x \neq 0$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$: $x = -\dfrac{11\pi}{6}$.



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$ б) $-\dfrac{11\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 Правильные треугольники ABC и ABM лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 10\sqrt{3}$. Точка P — середина AM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 3 : 1$. Вычислите объём пирамиды $MPTC$.

Решение.

Проведём высоту CD треугольника ABC. В тоже время CD – высота пирамиды $MPTC$, опущенная из вершины C на плоскость основания MPT.

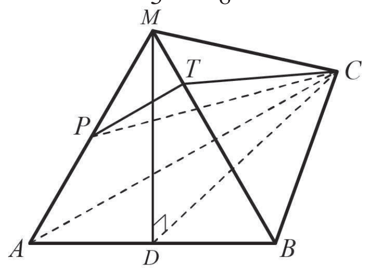
$$CD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 15.$$

Площадь треугольника MPT составляет $\dfrac{1}{8}S_{ABM}$. Следовательно,

$$S_{MPT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{32} = \frac{300\sqrt{3}}{32} = \frac{75\sqrt{3}}{8}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT}\cdot CD = \frac{1}{3}\cdot\frac{75\sqrt{3}}{8}\cdot 15 = \frac{375\sqrt{3}}{8}.$$



Ответ: $\dfrac{375\sqrt{3}}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\le 0, \\ \dfrac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x}\ge 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\le 0;\quad -1\le x\le\sqrt{10}.$$

Решим второе неравенство:

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-3^2}{x}\ge 0;\quad \frac{|x^2-2x-1|-2}{x}\ge 0;\quad \frac{\left(x^2-2x-1\right)^2-4}{x}\ge 0;$$

$$\frac{\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2-2x+1\right)}{x}\ge 0;\quad \frac{\left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(x-1\right)^2}{x}\ge 0.$$

Методом интервалов найдём решения: $-1\le x<0,\quad x\ge 3$ или $x=1$.

Поскольку $3<\sqrt{10}$, получаем решение системы:

$$-1\le x<0,\quad x=1\quad\text{или}\quad 3\le x\le\sqrt{10}.$$

Ответ: $[-1;\ 0),\quad [3;\ \sqrt{10}],\quad 1.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 7 и 25 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 60. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение.

Докажем сначала, что отрезок, соединяющий середины диагоналей любой трапеции, равен полуразности оснований. Действительно, рассмотрим произвольную трапецию $XYZT$ с основаниями $XT>YZ$ (рис. 1).

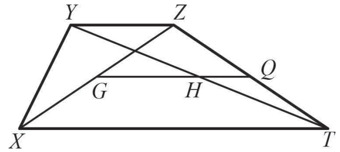


Рис. 1

Пусть G и H — середины её диагоналей XZ и YT, а Q — середина боковой стороны ZT. Тогда GQ и HQ — средние линии треугольников XZT и YZT, поэтому $GQ\parallel XT$ и $HQ\parallel YZ$, а т.к. $YZ\parallel XT$, то $HQ\parallel XT$. Значит, точки G, H и Q лежат на одной прямой. Следовательно,

$$GH=GQ-HQ=\frac{1}{2}XT-\frac{1}{2}YZ=\frac{XT-YZ}{2},$$

что и требовалось доказать. Этот факт можно считать известным.

Перейдём к нашей задаче. Предположим, что $KN>LM$ (рис. 2).

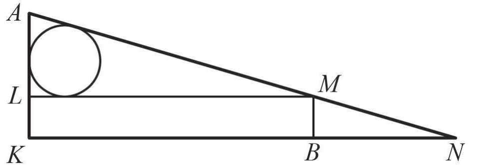


Рис. 2

Тогда точки A и L лежат по одну сторону от прямой KN и $\dfrac{KN-LM}{2}=12$. Через вершину M проведём прямую, параллельную боковой стороне KL. Пусть эта прямая пересекается с прямой KN в точке B. Тогда

$$BN=KN-KB=KN-LM=24,\quad BM=KL=7.$$

Треугольник BMN — прямоугольный, т к.

$$BN^2+BM^2=24^2+7^2=576+49=625=25^2=MN^2,$$

значит, прямые AK и KN перпендикулярны.

Из системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(KN-LM)=12; \\ \frac{1}{2}(KN+LM)=60 \end{cases}$$

находим, что $KN=72,\ LM=48$.

Треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику MBN (по двум углам) с коэффициентом $\frac{LM}{BN}=\frac{48}{24}=2$, значит,

$$AL=2\cdot BM=2\cdot 7=14,\quad AM=2\cdot MN=2\cdot 25=50.$$

Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

$$r=\frac{AL+LM-AM}{2}=\frac{14+48-50}{2}=6.$$

Пусть теперь $KN<LM$ (рис. 3).

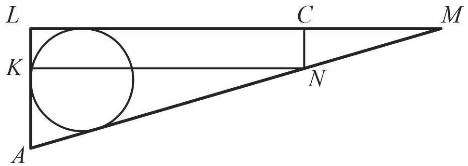


Рис. 3

Тогда точки A и L лежат по разные стороны от прямой KN. В этом случае $KN=48$, $LM=72$. Пусть прямая, проведённая через точку N параллельно KL, пересекает прямую LM в точке C. Тогда треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику NCM с коэффициентом 3, поэтому

$$AL=3CN=21,\quad AM=3MN=75.$$

Пусть R — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

$$r=\frac{AL+LM-AM}{2}=\frac{21+72-75}{2}=9.$$

Ответ: 6 или 9.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}+\frac{3}{\sin x}+3=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Левая часть уравнения определена, если $\cos x\neq 0$ и $\sin x\neq 0$. При этом

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1.$$

Поэтому уравнение можно переписать в виде

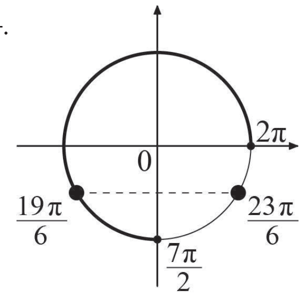
$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{3}{\sin x}+2=0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\frac{1}{\sin x}$, получим $\frac{1}{\sin x}=-2$ или $\frac{1}{\sin x}=-1$. Значит, либо $\sin x=-\frac{1}{2}$, откуда

$$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\quad x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

либо $\sin x=-1$, что невозможно в силу условия $\cos x\neq 0$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$: $x=\frac{19\pi}{6}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено, или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 Правильные треугольники ABC и BCM лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

Решение.

Проведём высоту AD треугольника ABC. В тоже время AD — высота пирамиды $MPTA$, опущенная из вершины A на плоскость основания MPT.

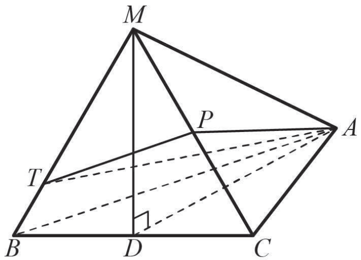
$$AD = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Площадь треугольника MPT составляет $\frac{3}{8}S_{BCM}$. Следовательно,

$$S_{MPT} = \frac{3BC^2\sqrt{3}}{32} = \frac{3 \cdot 64\sqrt{3}}{32} = 6\sqrt{3}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24.$$



Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + (2 - \sqrt{15})x - 2\sqrt{15} \le 0, \\ \dfrac{0,2^{|x^2-4x+2|} - 0,04}{3 - x} \le 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$x^2 + (2 - \sqrt{15})x - 2\sqrt{15} \le 0; \quad -2 \le x \le \sqrt{15}.$$

Решим второе неравенство:

$$\frac{0,2^{|x^2-4x+2|} - 0,2^2}{3 - x} \le 0; \quad \frac{|x^2 - 4x + 2| - 2}{3 - x} \ge 0; \quad \frac{(x^2 - 4x + 2)^2 - 4}{3 - x} \ge 0;$$

$$\frac{(x^2 - 4x)(x^2 - 4x + 4)}{3 - x} \ge 0; \quad \frac{x(x - 4)(x - 2)^2}{3 - x} \ge 0.$$

Методом интервалов найдём решения: $x \le 0$, $3 < x \le 4$ или $x = 2$.

Поскольку $\sqrt{15} < 4$, получаем решение системы:

$$-2 \le x \le 0, \quad x = 2 \text{ или } 3 < x \le \sqrt{15}.$$

Ответ: $[-2;\ 0]$, 2, $(3;\ \sqrt{15}]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 16 и 34 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 15, средняя линия трапеции равна 30. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение.

Докажем сначала, что отрезок, соединяющий середины диагоналей любой трапеции, равен полуразности оснований. Действительно, рассмотрим произвольную трапецию $XYZT$ с основаниями $XT > YZ$ (рис. 1).

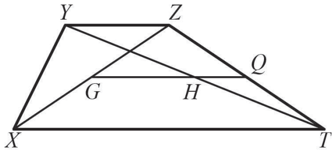


Рис. 1

Пусть G и H — середины её диагоналей XZ и YT, а Q — середина боковой стороны ZT. Тогда GQ и HQ — средние линии треугольников XZT и YZT, поэтому $GQ \parallel XT$ и $HQ \parallel YZ$, а т к. $YZ \parallel XT$, то $HQ \parallel XT$. Значит, точки G, H и Q лежат на одной прямой. Следовательно,

$$GH = GQ - HQ = \frac{1}{2}XT - \frac{1}{2}YZ = \frac{XT - YZ}{2},$$

что и требовалось доказать. Этот факт можно считать известным.

Перейдём к нашей задаче. Предположим, что $KN > LM$ (рис. 2).

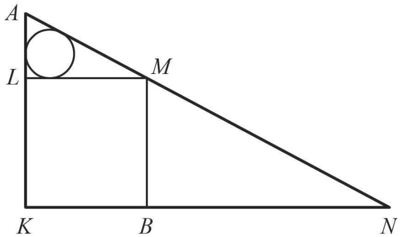


Рис. 2

Тогда точки A и L лежат по одну сторону от прямой KN и $\frac{KN - LM}{2} = 15.$ Через вершину M проведём прямую, параллельную боковой стороне KL. Пусть эта прямая пересекается с прямой KN в точке B. Тогда

$$BN = KN - KB = KN - LM = 30, \quad BM = KL = 16.$$

Треугольник BMN — прямоугольный, т.к.

$$BN^2 + BM^2 = 30^2 + 16^2 = 900 + 256 = 1156 = 34^2 = MN^2,$$

значит, прямые AK и KN перпендикулярны.

Из системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(KN - LM) = 15; \\ \frac{1}{2}(KN + LM) = 30 \end{cases}$$

находим, что $KN = 45$, $LM = 15$.

Треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику MBN (по двум углам) с коэффициентом $\frac{LM}{BN} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, значит,

$$AL = \tfrac{1}{2}BM = \tfrac{1}{2} \cdot 16 = 8, \quad AM = \tfrac{1}{2}MN = \tfrac{1}{2} \cdot 34 = 17.$$

Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = \frac{8 + 15 - 17}{2} = 3.$$

Пусть теперь $KN < LM$ (рис. 3).

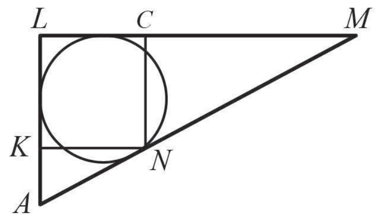


Рис. 3

Тогда точки A и L лежат по разные стороны от прямой KN. В этом случае $KN = 15$, $LM = 45$. Пусть прямая, проведённая через точку N параллельно KL, пересекает прямую LM в точке C. Тогда треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику NCM с коэффициентом $\frac{3}{2}$, поэтому $AL = \frac{3}{2}CN = 24$, $AM = \frac{3}{2}MN = 51$.

Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = \frac{24 + 45 - 51}{2} = 9.$$

Ответ: 3 или 9.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Левая часть уравнения определена, если $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$. При этом

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Поэтому уравнение можно переписать в виде

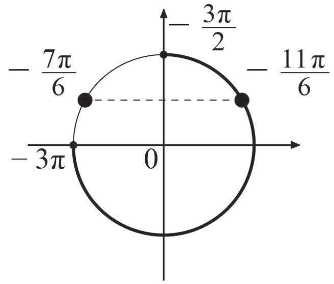
$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 2 = 0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\frac{1}{\sin x}$, получим $\frac{1}{\sin x} = 2$ или $\frac{1}{\sin x} = -1$. Значит, либо $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$$

либо $\sin x = -1$, что невозможно в силу условия $\cos x \neq 0$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$: $x = -\frac{11\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 Правильные треугольники *ABC* и *BCM* лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка *P* — середина *CM*, а точка *T* делит отрезок *BM* так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды *MPTA*.

Решение.

Проведём высоту *AD* треугольника *ABC*. В тоже время *AD* — высота пирамиды *MPTA*, опущенная из вершины *A* на плоскость основания *MPT*.

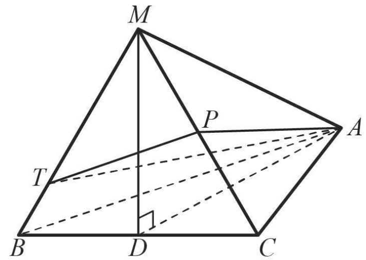
$$AD = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Площадь треугольника *MPT* составляет $\frac{3}{8}S_{BCM}$. Следовательно,

$$S_{MPT} = \frac{3BC^2\sqrt{3}}{32} = \frac{3\cdot 64\sqrt{3}}{32} = 6\sqrt{3}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT}\cdot AD = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3} = 24.$$



Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\le 0, \\ \dfrac{3^{\left|x^2-2x-1\right|}-9}{x}\ge 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\le 0;\quad -1\le x\le\sqrt{10}.$$

Решим второе неравенство:

$$\frac{3^{\left|x^2-2x-1\right|}-3^2}{x}\ge 0;\quad \frac{\left|x^2-2x-1\right|-2}{x}\ge 0;\quad \frac{\left(x^2-2x-1\right)^2-4}{x}\ge 0;$$

$$\frac{\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2-2x+1\right)}{x}\ge 0;\quad \frac{\left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(x-1\right)^2}{x}\ge 0.$$

Методом интервалов найдём решения: $-1\le x<0,\quad x\ge 3$ или $x=1.$

Поскольку $3<\sqrt{10}$, получаем решение системы:

$$-1\le x<0,\quad x=1\quad \text{или}\quad 3\le x\le\sqrt{10}.$$

Ответ: $[-1;\ 0),\quad [3;\ \sqrt{10}],\quad 1.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 16 и 34 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 15, средняя линия трапеции равна 30. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение.

Докажем сначала, что отрезок, соединяющий середины диагоналей любой трапеции, равен полуразности оснований. Действительно, рассмотрим произвольную трапецию $XYZT$ с основаниями $XT>YZ$ (рис. 1).

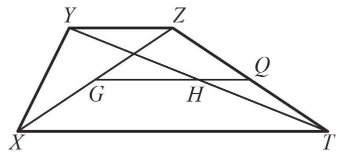


Рис. 1

Пусть G и H — середины её диагоналей XZ и YT, а Q — середина боковой стороны ZT. Тогда GQ и HQ — средние линии треугольников XZT и YZT, поэтому $GQ\parallel XT$ и $HQ\parallel YZ$, а т.к. $YZ\parallel XT$, то $HQ\parallel XT$. Значит, точки G, H и Q лежат на одной прямой. Следовательно,

$$GH=GQ-HQ=\frac{1}{2}XT-\frac{1}{2}YZ=\frac{XT-YZ}{2},$$

что и требовалось доказать. Этот факт можно считать известным.

Перейдём к нашей задаче. Предположим, что $KN>LM$ (рис. 2).

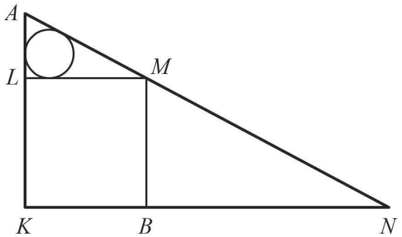


Рис. 2

Тогда точки A и L лежат по одну сторону от прямой KN и $\dfrac{KN-LM}{2}=15.$ Через вершину M проведём прямую, параллельную боковой стороне KL. Пусть эта прямая пересекается с прямой KN в точке B. Тогда

$$BN=KN-KB=KN-LM=30,\quad BM=KL=16.$$

Треугольник BMN — прямоугольный, т к.

$$BN^2+BM^2=30^2+16^2=900+256=1156=34^2=MN^2,$$

значит, прямые AK и KN перпендикулярны.

Из системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(KN - LM) = 15; \\ \frac{1}{2}(KN + LM) = 30 \end{cases}$$

находим, что $KN = 45$, $LM = 15$.

Треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику MBN (по двум углам) с коэффициентом $\frac{LM}{BN} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, значит,

$$AL = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8, \quad AM = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17.$$

Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = \frac{8 + 15 - 17}{2} = 3.$$

Пусть теперь $KN < LM$ (рис. 3).

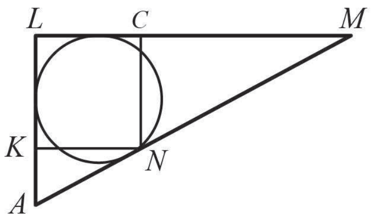


Рис. 3

Тогда точки A и L лежат по разные стороны от прямой KN. В этом случае $KN = 15$, $LM = 45$. Пусть прямая, проведённая через точку N параллельно KL, пересекает прямую LM в точке C. Тогда треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику NCM с коэффициентом $\frac{3}{2}$, поэтому $AL = \frac{3}{2}CN = 24$, $AM = \frac{3}{2}MN = 51$.

Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = \frac{24 + 45 - 51}{2} = 9.$$

Ответ: 3 или 9.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}+\dfrac{3}{\sin x}+3=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Левая часть уравнения определена, если $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$. При этом

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1.$$

Поэтому уравнение можно переписать в виде

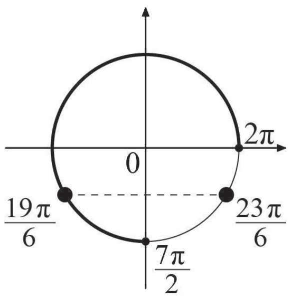
$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{3}{\sin x}+2=0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\dfrac{1}{\sin x}$, получим $\dfrac{1}{\sin x}=-2$ или $\dfrac{1}{\sin x}=-1$. Значит, либо $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, откуда

$$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\quad x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

либо $\sin x=-1$, что невозможно в силу условия $\cos x\neq 0$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$: $x=\dfrac{19\pi}{6}$.



Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{19\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено, или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 Правильные треугольники ABC и ABM лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB=10\sqrt{3}$. Точка P — середина AM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT:TM=3:1$. Вычислите объём пирамиды $MPTC$.

Решение.

Проведём высоту CD треугольника ABC. В тоже время CD – высота пирамиды $MPTC$, опущенная из вершины C на плоскость основания MPT.

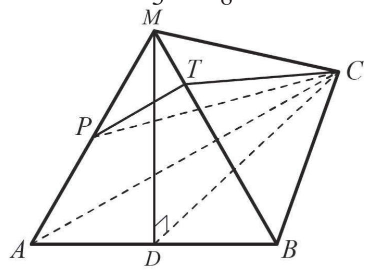
$$CD=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{10\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}=15.$$

Площадь треугольника MPT составляет $\dfrac{1}{8}S_{ABM}$. Следовательно,

$$S_{MPT}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{32}=\frac{300\sqrt{3}}{32}=\frac{75\sqrt{3}}{8}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}S_{MPT}\cdot CD=\frac{1}{3}\cdot\frac{75\sqrt{3}}{8}\cdot 15=\frac{375\sqrt{3}}{8}.$$



Ответ: $\dfrac{375\sqrt{3}}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15} \le 0, \\ \dfrac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,04}{3-x} \le 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15} \le 0; \quad -2 \le x \le \sqrt{15}.$$

Решим второе неравенство:

$$\frac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,2^2}{3-x} \le 0; \quad \frac{|x^2-4x+2|-2}{3-x} \ge 0; \quad \frac{(x^2-4x+2)^2-4}{3-x} \ge 0;$$

$$\frac{(x^2-4x)(x^2-4x+4)}{3-x} \ge 0; \quad \frac{x(x-4)(x-2)^2}{3-x} \ge 0.$$

Методом интервалов найдём решения: $x \le 0, 3 < x \le 4$ или $x = 2$.

Поскольку $\sqrt{15} < 4$, получаем решение системы:

$$-2 \le x \le 0, \quad x = 2 \text{ или } 3 < x \le \sqrt{15}.$$

Ответ: $[-2;\ 0]$, 2, $(3;\ \sqrt{15}]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 7 и 25 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 60. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение.

Докажем сначала, что отрезок, соединяющий середины диагоналей любой трапеции, равен полуразности оснований. Действительно, рассмотрим произвольную трапецию $XYZT$ с основаниями $XT > YZ$ (рис. 1).

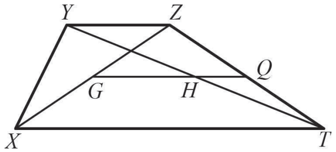


Рис. 1

Пусть G и H — середины её диагоналей XZ и YT, а Q — середина боковой стороны ZT. Тогда GQ и HQ — средние линии треугольников XZT и YZT, поэтому $GQ \parallel XT$ и $HQ \parallel YZ$, а т.к. $YZ \parallel XT$, то $HQ \parallel XT$. Значит, точки G, H и Q лежат на одной прямой. Следовательно,

$$GH = GQ - HQ = \frac{1}{2}XT - \frac{1}{2}YZ = \frac{XT - YZ}{2},$$

что и требовалось доказать. Этот факт можно считать известным.

Перейдём к нашей задаче. Предположим, что $KN > LM$ (рис. 2).

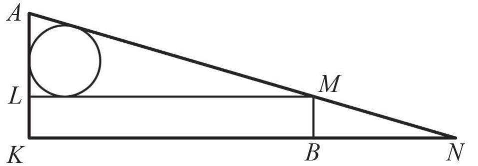


Рис. 2

Тогда точки A и L лежат по одну сторону от прямой KN и $\dfrac{KN - LM}{2} = 12$. Через вершину M проведём прямую, параллельную боковой стороне KL. Пусть эта прямая пересекается с прямой KN в точке B. Тогда

$$BN = KN - KB = KN - LM = 24, \quad BM = KL = 7.$$

Треугольник BMN — прямоугольный, т к.

$$BN^2 + BM^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 = 25^2 = MN^2,$$

значит, прямые AK и KN перпендикулярны.

Из системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(KN - LM) = 12; \\ \frac{1}{2}(KN + LM) = 60 \end{cases}$$

находим, что $KN = 72$, $LM = 48$.

Треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику MBN (по двум углам) с коэффициентом $\frac{LM}{BN} = \frac{48}{24} = 2$, значит,

$$AL = 2 \cdot BM = 2 \cdot 7 = 14, \quad AM = 2 \cdot MN = 2 \cdot 25 = 50.$$

Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = \frac{14 + 48 - 50}{2} = 6.$$

Пусть теперь $KN < LM$ (рис. 3).

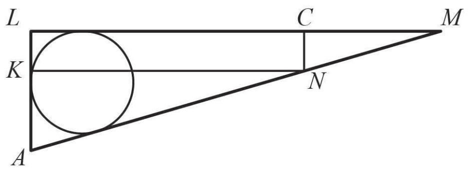


Рис. 3

Тогда точки A и L лежат по разные стороны от прямой KN. В этом случае $KN = 48$, $LM = 72$. Пусть прямая, проведённая через точку N параллельно KL, пересекает прямую LM в точке C. Тогда треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику NCM с коэффициентом 3, поэтому

$$AL = 3CN = 21, \quad AM = 3MN = 75.$$

Пусть R — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = \frac{21 + 72 - 75}{2} = 9.$$

Ответ: 6 или 9.

Содержание критерия	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3