Проект подготовлен к общественно-профессиональному обсуждению

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант

контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2014 года по математике

подготовлен Федеральным государственным бюджетным научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2014 года по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2014 года разработан по заданию Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме, уровне сложности. Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2014 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов – в кодификаторах требований и элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2014 года.

Правильное решение каждого из заданий B1–B14 части 1 экзаменационной работы оценивается 1 баллом. Правильное решение каждого из заданий C1 и C2 оценивается 2 баллами, C3 и C4 – 3 баллами, C5 и C6 – 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы – 32.

Верное выполнение не менее пяти заданий экзаменационной работы отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования.

К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, даётся возможное решение. Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике.

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
для проведения в 2014 году единого государственного экзамена
по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

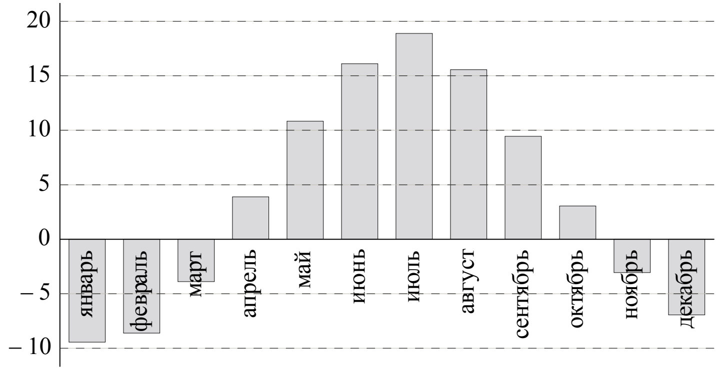
Часть 1

Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

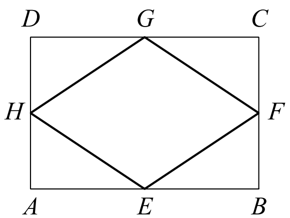
Ответ: ____________________________.

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Ярославле по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда средняя температура в Ярославле была отрицательной.



Ответ: ____________________________.

B3 Середины последовательных сторон прямоугольника, диагонали которого равны 10, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырёхугольника.



Ответ: ____________________________.

B4 Строительная фирма планирует купить 70 $м^3$ пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за 1 $м^3$)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия доставки
А	2 600	10 000	Нет
Б	2 800	8 000	При заказе товара на сумму свыше 150 000 рублей доставка бесплатная
В	2 700	8 000	При заказе товара на сумму свыше 200 000 рублей доставка бесплатная

Ответ: ___________________________.

B5 Найдите корень уравнения $\log_3(x-3)=2$.

Ответ: ___________________________.

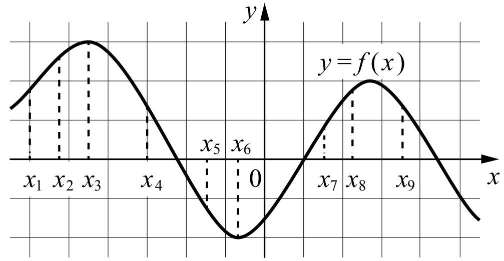
B6 Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Найдите угол BOC, если угол BAC равен $32°$.

Ответ: ___________________________.

B7 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

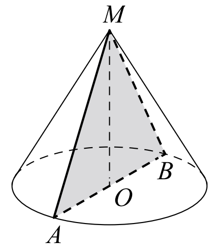
Ответ: ___________________________.

B8 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, ..., x_9. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество найденных точек.



Ответ: ___________________________.

B9 Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5.



Ответ: ___________________________.

B10 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

Ответ: ___________________________.

B11 Объём первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

Ответ: ___________________________.

B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемого сигнала (в МГц), f — частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала, если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Ответ: ___________________________.

B13 Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Ответ: ___________________________.

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-1)e^x$ на отрезке $[-1;1]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 5$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2:3$, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x \le 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3\left(x^2 - x - 2\right) \le 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

C4 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + \left|x^2 - 8x + 7\right|$ больше 1.

C6 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.
а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Система оценивания экзаменационной работы по математике

Ответы к заданиям части 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

№ задания	Ответ
B1	5
B2	5
B3	20
B4	192 000
B5	12
B6	64
B7	–0,8
B8	3
B9	12
B10	0,92
B11	9
B12	751
B13	5
B14	-1

Решения и критерии оценивания заданий части 2

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий части 2 зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Решение.

а) Преобразуем обе части уравнения:

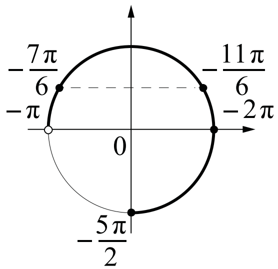
$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x;\ 2\sin^2 x - \sin x = 0;\ \sin x(2\sin x - 1) = 0,$$

откуда $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ находим: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.



Получаем числа: -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) πn, $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

Комментарий. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 5$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2:3$, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

Решение. Сечение плоскостью AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P. Отрезок AP параллелен C_1O, отрезок C_1P параллелен AO. Следовательно, искомое сечение — параллелограмм AOC_1P (рис. 1).

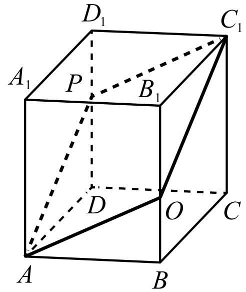


Рис. 1

$$BO = \frac{2}{5}BB_1 = 2,\ B_1O = 3.$$

$$C_1O = \sqrt{C_1B_1^2 + B_1O^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13};$$

$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Значит, AOC_1P — ромб. Найдем диагонали этого ромба:

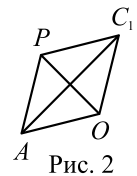


Рис. 2

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38},$$

$$OP = 2\sqrt{AO^2 - \frac{1}{4}AC_1^2} = \sqrt{4 \cdot 13 - 38} = \sqrt{14}.$$

Тогда $S_{AOC_1P} = \frac{AC_1 \cdot OP}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{38} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{133}$.

Ответ: $\sqrt{133}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x \le 9\cdot 2^x + 22, \\ \log_3\left(x^2 - x - 2\right) \le 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство. Запишем его в виде

$$\left(2^x\right)^2 - 9\cdot 2^x - 22 \le 0.$$

Сделаем замену $t = 2^x$. Получаем:

$$t^2 - 9t - 22 \le 0;\ (t+2)(t-11) \le 0;\ -2 \le t \le 11.$$

Значит, $-2 \le 2^x \le 11$, откуда $x \le \log_2 11$.

Решим второе неравенство системы:

$$\log_3\left((x+1)(x-2)\right) - \log_3 \frac{x+1}{x-2} \le 1;\ \begin{cases} \log_3 \dfrac{(x+1)(x-2)^2}{x+1} \le 1, \\ (x+1)(x-2) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 (x-2)^2 \le 1, \\ (x+1)(x-2) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)^2 \le 3, \\ (x+1)(x-2) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\sqrt{3} \le x-2 \le \sqrt{3}, \\ (x+1)(x-2) > 0; \end{cases}$$

$$2 < x \le 2+\sqrt{3}.$$

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Сравним $\log_2 11$ и $2+\sqrt{3}$:

$$2+\sqrt{3} > 3 + \frac{1}{2} = 3 + \log_2\sqrt{2} > \log_2(8\cdot 1{,}4) = \log_2 11{,}2 > \log_2 11.$$

Решение системы неравенств: $\left(2; \log_2 11\right]$.

Ответ: $\left(2; \log_2 11\right]$.

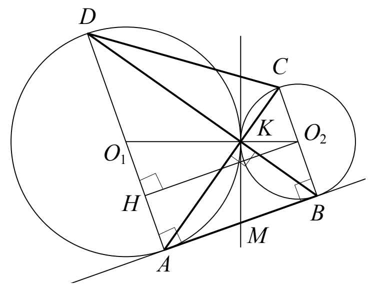
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение.



а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, — прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\dfrac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\dfrac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \dfrac{DK}{KB} = \dfrac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Ответ: 3,2.

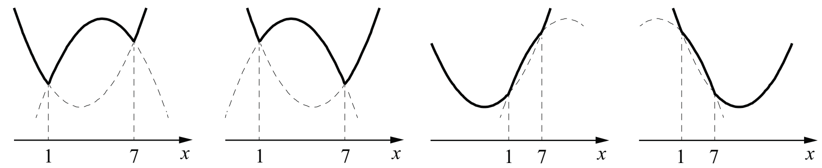
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + \left|x^2 - 8x + 7\right|$ больше 1.

Решение. При $x^2 - 8x + 7 \geq 0$: $f(x) = x^2 + 2(a-4)x + 7$, а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4 - a$.

При $x^2 - 8x + 7 < 0$: $f(x) = -x^2 + (2a+8)x - 7$, а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все четыре возможных вида графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.



Наименьшее значение функция $f(x)$ может принять только в точках $x = 1$, $x = 7$ или $x = 4 - a$. Поэтому наименьшее значение функции $f(x)$ больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) > 1, \\ f(7) > 1, \\ f(4-a) > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a > 1, \\ 14a > 1, \\ 2a(4-a) + \left|a^2 - 9\right| > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a > \dfrac{1}{2}, \\ 2a^2 - 8a + 1 - \left|a^2 - 9\right| < 0. \end{cases}$$

4

Если $\frac{1}{2} < a < 3$, то $3a^2 - 8a - 8 < 0$, откуда $\frac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \frac{4 + \sqrt{40}}{3}$. Этот промежуток содержит интервал $\frac{1}{2} < a < 3$.

Если $a \geq 3$, то $a^2 - 8a + 10 < 0$, откуда $4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6}$. Значит, $3 \leq a < 4 + \sqrt{6}$.

Объединяя найденные промежутки, получаем: $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}$.

Ответ: $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k-8l+0\cdot m=-3(k+l+m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40<k+l+m<48$, поэтому $k+l+m=44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k-8l=-3(k+l+m)$ к виду $5l=7k+3m$. Так как $m\ge 0$, получаем, что $5l\ge 7k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k+l+m=44$ в правую часть равенства $4k-8l=-3(k+l+m)$: $4k-8l=-132$, откуда $k=2l-33$. Так как $k+l\le 44$, получаем: $3l-33\le 44$, $3l\le 77$, $l\le 25$, $k=2l-33\le 17$; то есть положительных чисел не более 17.

в) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и два раза

написан 0. Тогда $\frac{4\cdot 17-8\cdot 25}{44}=-3$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — примеры в п. *в*, обеспечивающие точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4